Modelos VAR−MSV-t Multivariados: Estudio con Datos Simulados

Marvin Levi Villafranca Rivera[I] y Cristian Andrés Cruz Torres[II]

Los modelos autorregresivos vectoriales (VAR) son útiles para capturar relaciones dinámicas entre series de tiempo multivariadas. Usualmente, en estos modelos se asumen errores normales multivariados con matriz de covarianza constante en el tiempo. Sin embargo, ambos supuestos rara vez se cumplen en la práctica. Un modelo VAR(k) generalmente se define como $\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, $t = 1, \ldots, n$, donde $\boldsymbol{y}_t \in \mathbb{R}^p$ es el vector de variables endógenas; $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^p$ es el vector intercepto; $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $i = 1, \ldots, k$, son matrices de coeficientes estables; $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathrm{N}_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma})$ son errores i.i.d.

Los errores $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ tienen curtosis de Mardia teórica igual a $p(p+2)$, mientras que cada componente individual ε_{it} se distribuye normal y tiene curtosis teórica igual a 3. Cuando $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ es normal multivariante y $\boldsymbol{A}_i\, i = 1, \ldots, k$ son estables, $\boldsymbol{y}_t$ también es normal multivariante, por lo que su curtosis de Mardia es $p(p + 2)$ y la de cada componente marginal es 3. Esto es lo que se esperaría en series multivariadas bajo supuestos de normalidad. Sin embargo, cuando se analizan rendimientos mensuales de series de tiempo macroeconómicas[1] y financieras[2] de Estados Unidos, desde febrero de 1947 hasta marzo de 2023 —se aplicó la fórmula $r_{it} = 100\left(\log(y_{it}) - \log(y_{i,t-1})\right),\ i = 1, \ldots, p$— se observa la siguiente curtosis muestral: (a) 41.12 en la serie de Producción Industrial: Índice total (ajustado estacionalmente), (b) 4.00 en la Tasa de desempleo (ajustada estacionalmente), (c) 6.91 en el Índice de precios al consumidor para todos los consumidores urbanos, (d) 32.10 en la Tasa de mercado secundario de letras del Tesoro (base de descuento) y (e) 7.68 en el índice bursátil S&P 500. En conjunto, para el vector de cinco rendimientos, la curtosis multivariante de Mardia es 135,30, muy por encima del valor teórico bajo normalidad $p(p+2) = 35$. Este breve análisis aporta evidencia empírica de que una serie de tiempo multivariante compuesta por estos cinco rendimientos no tiene distribución normal multivariante.

La curtosis elevada implica colas pesadas, mayor probabilidad de observaciones extremas y períodos de alta variabilidad que no pueden ser modelados con una matriz de covarianza constante en el tiempo. Para superar esta dificultad, en 1997, Uhlig [3], en su trabajo pionero, incorporó volatilidad estocástica multivariante en el término de error, permitiendo que la matriz de covarianza condicional $\boldsymbol{\Sigma}_t$ varíe en el tiempo y modelando la heterocedasticidad condicional. Desde entonces, ha habido esfuerzos por abordar este problema. Sin embargo, por motivos de espacio solo expondremos nuestros trabajos.

Este trabajo se motiva en una serie de contribuciones de Cruz y Villafranca [1, 2, 4], en las que se propone un modelo VAR-MSV con apalancamiento cruzado. En su propuesta, la parte VAR captura las relaciones dinámicas entre las series multivariadas, mientras que la parte MSV captura la volatilidad condicional cambiante en el tiempo y permite efectos de apalancamiento y apalancamiento cruzado. Para estimar el modelo utilizan métodos de Monte Carlo vía Cadenas de Markov (MCMC). El trabajo más reciente [4] corresponde a una contribución presentada en la Semana de Matemática 2025 en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras, basada en un artículo enviado a la *Revista de Matemática: Teoría*

[1] Fuente de series macro: FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis (`https://fred.stlouisfed.org/`).
[2] S&P 500 mensual: `https://www.multpl.com/s-p-500-historical-prices/table/by-month`.

[I] Universidad Nacional Autónoma de Honduras – UNAH. `marvinvr_23_11_2012@hotmail.com`
[II] Universidad Nacional Autónoma de Honduras – UNAH. `cristian.cruz@unah.edu.hn`

y Aplicaciones, el cual fue aceptado el 28 de noviembre de 2025. En esencia, se trata de un modelo VAR-MSV con errores t de Student univariados (VAR-MSV-t).

Con base en los aportes y observaciones de esos trabajos, así como en diversos estudios sobre series de tiempo macroeconómicas y financieras, hemos constatado que, si bien un modelo VAR-MSV captura los períodos de alta variabilidad (movimientos de baja frecuencia), observaciones de magnitud muy extrema (movimientos de alta frecuencia) pueden tener repercusiones en la estimación de algunos parámetros. En particular, al ajustar un VAR-MSV a series con valores extremos, el parámetro de persistencia y la matriz de covarianza de la volatilidad tienden a sobreestimarse, interpretando los movimientos de alta frecuencia como cambios persistentes en la volatilidad. En [4] tratamos de abordar este problema; sin embargo, observamos dificultades cuando las series exhiben grados distintos de curtosis, por ejemplo, cuando una variable con una distribución aproximadamente normal se modela con otra que tiene una curtosis muy superior a la normal. En este caso, los errores t de Student del modelo VAR-MSV-t tratarán de ajustarse a ambas series, lo que implica que los grados de libertad tienden a promediarse, resultando en una estimación de colas más gruesa para la serie normal y menos gruesa para la serie leptocúrtica.

Por tanto, para abordar estos problemas, en este trabajo proponemos un modelo VAR-MSV-t multivariado con efecto de apalancamiento cruzado. El modelo se define como $\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{y}_{t-i} + \boldsymbol{\Lambda}_t^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{V}_t^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_t$, $t = 1, \ldots, n$, donde $\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\eta}_t$, $t = 1, \ldots, n-1$; $\boldsymbol{\alpha}_1 \sim \mathrm{N}_p(\boldsymbol{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_0)$; $\boldsymbol{V}_t^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\left(\exp\left(\frac{\alpha_{1t}}{2}\right), \ldots, \exp\left(\frac{\alpha_{pt}}{2}\right)\right)$; $\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_p)$; $\boldsymbol{\Lambda}_t^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\left(\lambda_{1t}^{-\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_{pt}^{-\frac{1}{2}}\right)$, $t = 1, \ldots, n$; $\lambda_{it} \overset{iid}{\sim} \mathrm{Gamma}\left(\frac{\nu_i}{2}, \frac{\nu_i}{2}\right)$, $i = 1, \ldots, p$; $\nu_i \sim \mathrm{Gamma}\left(m_0^{v_i}, s_0^{v_i}\right)$; $\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_0) = (\boldsymbol{I}_{p^2} - \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Phi})^{-1} \operatorname{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta})$, $\sigma_{0ij} = \frac{\sigma_{ij,\eta\eta}}{1-\phi_i\phi_j}$, donde $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\lambda}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \operatorname{cov}(\boldsymbol{\lambda}_t, \boldsymbol{\eta}_s) = \boldsymbol{0}_{p\times p}$, para todo t, s. Por último, simulamos datos de los modelos considerados para mostrar, con evidencia empírica, el sesgo en la persistencia y en la covarianza de la volatilidad ante valores extremos y curtosis.

Referencias

[1] M. L. Villafranca Rivera. "Modelos autorregresivos vectoriales integrados con volatilidad estocástica multivariada". Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de Honduras, 2022. URL: https://mm.unah.edu.hn/dmsdocument/13357-tesismarvinvillafranca-pdf.

[2] C. A. Cruz Torres y M. L. Villafranca Rivera. "Modelos autorregresivos vectoriales integrados con volatilidad estocástica multivariada aplicado a la economía de Estados Unidos en el periodo de 1948–2019". En: *Aglala* 15.2 (2024), págs. 116-142. URL: https://revistas.uninunez.edu.co/index.php/aglala/article/view/2523.

[3] Harald Uhlig. "Bayesian vector autoregressions with stochastic volatility". En: *Econometrica* 1 (1997), págs. 59-72. DOI: https://doi.org/10.2307/2171813.

[4] M. L. Villafranca Rivera. *Modelo VAR Integrado con Volatilidad Estocástica Multivariada y Errores de Cola Pesada*. Semana de la Carrera de Matemática 2025, UNAH. Conferencia. Tegucigalpa, Honduras, 2025. URL: https://matematica.unah.edu.hn/assets/Semana2025V3.pdf (visitado 17-10-2025).

[I] Universidad Nacional Autónoma de Honduras – UNAH. marvinvr_23_11_2012@hotmail.com
[II] Universidad Nacional Autónoma de Honduras – UNAH. cristian.cruz@unah.edu.hn