

# Una conexión entre gramáticas independientes del contexto y combinatoria

Juan Gabriel Triana Laverde

Departamento de Ciencias Básicas, Uniagustiniana, Bogotá, Colombia.  
ORCID:0000-0003-2991-6082. Email: juang.triana@uniagustiniana.edu.co

**Palabras clave:** Gramáticas independientes del contexto, derivada formal, combinatoria.

## 1 Resumen

Los conceptos de función formal y operador derivada formal fueron presentados por William Chen en 1993, dando origen a un cálculo gramatical con diversas aplicaciones en combinatoria [2, 3, 5, 7]. Dado un alfabeto  $\Sigma$  se define una función formal de la siguiente manera: cada  $a \in \Sigma$  es una función formal; si  $u$  y  $v$  son funciones formales, entonces  $u + v$  y  $u - v$  son funciones formales; si  $f(x)$  es una función analítica, y  $u$  es una función formal, entonces  $f(u)$  es una función formal; cada función formal es construida a partir de un número finito de pasos.

Una gramática independiente de contexto  $G$  sobre  $\Sigma$  se define como un conjunto de reglas de sustitución, llamadas producciones, con las cuales una letra en  $\Sigma$  es reemplazada por una función formal sobre  $\Sigma$ . Dada una gramática independiente del contexto  $G$  sobre  $\Sigma$ , se define el operador derivada formal  $D$ , con respecto a  $G$ , de la siguiente manera:

1. Para  $u, v$  funciones formales,

$$D(u + v) = D(u) + D(v) \text{ y } D(uv) = D(u)v + uD(v).$$

2. Si  $f(x)$  es una función analítica y  $u$  es una función formal

$$D(f(u)) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} D(u).$$

3. Para cada  $a \in \Sigma$ , si  $a \rightarrow u$  es una producción en  $G$ , con  $u$  función formal, entonces  $D(a) = u$ ; en otro caso  $a$  se denomina constante y  $D(a) = 0$ .

Por ejemplo, para la gramática  $G = \{a \rightarrow ab; b \rightarrow b\}$  se tiene que  $D(a) = ab$ ,  $D(b) = b$  y  $D(ab) = D(a)b + aD(b) = [ab]b + a[b] = ab^2 + ab$ . Para una función

formal  $u$ , se define  $D^{n+1}(u) = D(D^n(u))$  para  $n \geq 0$ , con  $D^0(u) = u$ . Esta idea se puede extender a gramáticas más generales, como las gramáticas matriciales [6].

En este trabajo presentamos algunas propiedades del operador derivada formal, así como la conexión de algunas gramáticas independientes del contexto con números multifactorial [7], familias de polinomios [4] y algunos resultados combinatorios [5].

## References

- [1] Chen, W. (1993). Context-free grammars, differential operators and formal power series. *Theoretical Computer Science* 117, 113-129.
- [2] Chen, W., Fu, A. (2017). Context-free grammars for permutations and increasing trees. *Advances in applied mathematics* 82, 58-82.
- [3] Ma, S., Ma, J., Yeh, Y., Zhu, B. (2018). Context-free grammars for several polynomials associated with eulerian polynomials. *European journal of combinatorics* 25(1), P1.31.
- [4] Triana, J. (2024). Bessel polynomials by context-free grammars. *Bistua* 22(2), 1-5.
- [5] Triana, J. (2022).  $r$ -Stirling numbers of the second kind through context-free grammars. *Journal of automata languages and combinatorics* 27(4), 323-333.
- [6] Triana, J., De Castro, R. (2019). Grammars and multifactorial numbers. *Global journal of pure and applied mathematics* 15(3), 251-259.
- [7] Triana, J., De Castro, R. (2019). The formal derivative operator and multifactorial numbers. *Revista Colombiana de Matemáticas* 53(2), 125-137.